Die Produktregel (Herleitung)

Betrachte die Funktion: $f(x) = u(x) \cdot (x)$

Für die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle a gilt:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(a) \cdot v(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\underline{\underline{u(x) \cdot v(x)}} - \underline{u(a) \cdot v(a)} + \overbrace{\underline{u(a) \cdot v(x)} - \underline{\underline{u(a) \cdot v(x)}}}^{Erweiterung}}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(a) \cdot v(x)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{u(a) \cdot v(x) - u(a) \cdot v(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \cdot v(x) + \lim_{x \to a} u(a) \cdot \frac{v(x) - v(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} v(x) + \lim_{x \to a} u(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a}}_{u'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} v(x)}_{v(a)} + \underbrace{\lim_{x \to a} u(a)}_{u(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a}}_{v'(a)}$$

$$\Rightarrow f'(a) = u'(a) \cdot v(a) + u(a) \cdot v'(a)$$

Dies gilt für alle a. Wir können also auch allg. schreiben:

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{Kurzform: f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$