Die Kettenregel (Herleitung)

Betrachte die Funktion: $f(x) = f\left(g(x)\right)$

Bsp.: $f(x) = (2x)^3$ Hierbei ist $g(x) = 2x$ die *innere* Funktion.

Die *äußere* Funktion ist $f(x) = \left(g(x)\right)^3$

Gesucht: $f'(x) = f'\left(g(x)\right)$

Für die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle a gilt:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(a)\right)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(a)\right)}{x - a} \cdot \overbrace{\frac{g(x) - g(a)}{g(x) - g(a)}}^{\text{Erweiterung}}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(a)\right)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(a)\right)}{g(x) - g(a)}}_{f'\left(g(a)\right)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{g'(a)}$$

$$f'(a) = f'\left(g(a)\right) \cdot g'(a)$$

Dies gilt für alle a. Wir können also auch allg. schreiben:

$$\boxed{f'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)}$$

Kettenregel: „Äußere Ableitung mal innere Ableitung“

(Die Multiplikation mit der Ableitung der inneren Funktion wird auch häufig als *„nachdifferenzieren“* bezeichnet.)

Im Bsp.:

$$f'(x) = \underbrace{3\left(g(x)\right)^2}_{f'\left(g(x)\right)} \cdot \underbrace{2}_{g'(x)}$$

$$= 3(2x)^2 \cdot 2$$

$$= 24x^2$$