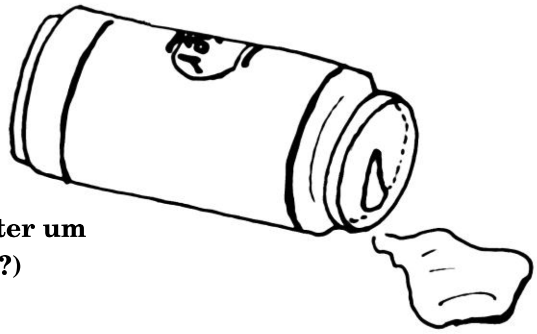
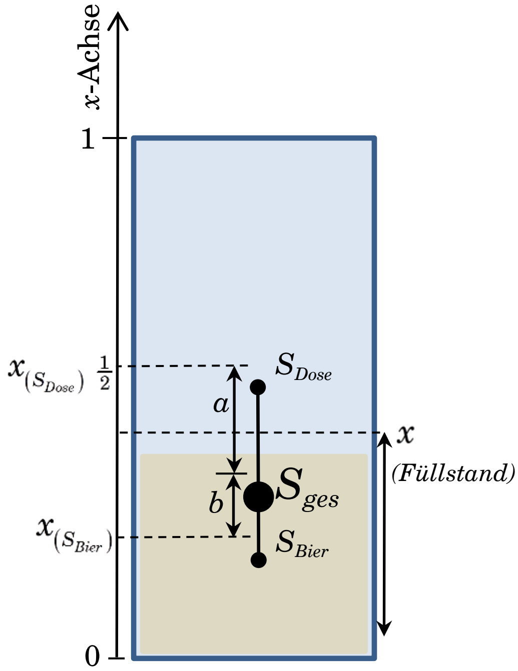
Bierdosen-mathematik

(Warum fällt die volle Dose leichter um und wann steht sie am stabilsten?)





Die Variable x gibt die Füllhöhe an $(0 < x < 1)$

Es gilt für die Orte der Schwerpunkte:

1) **Dose:** $x_{(S_{Dose})}$ ist konstant: $x_{(S_{Dose})} = \frac{1}{2}$

2) **Bier:** $x_{(S_{Bier})}$ ist abhängig vom Durst, nimmt also mit der Zeit ab (*ist somit variabel*).

Für den Schwerpunkt des Biers gilt: $x_{(S_{Bier})} = \frac{1}{2}x$ (= halbe Füllhöhe)

Die Dose steht natürlich umso stabiler, je tiefer der gemeinsame Schwerpunkt S_{ges} liegt!

Für den Ort des *gemeinsamen* Schwerpunks gilt:

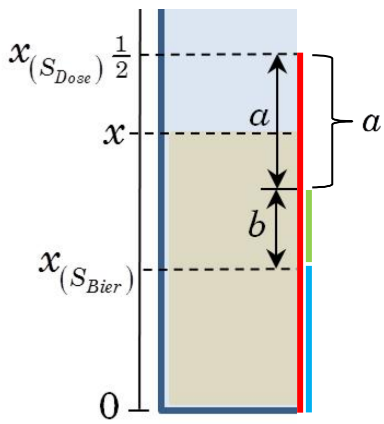
Aus der Astronomie (Planetenbewegungen, z.B. Erde-Mond) weiß man, dass gilt:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m_{Bier}}{m_{Dose}}}$$

(Die Abstände vom gemeinsamen Schwerpunkt verhalten sich umgekehrt zu den entsprechenden Massen)

Also gilt für a: $a = x_{(S_{Dose})} - x_{(S_{Bier})} - b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - b$

$$\Rightarrow \text{Ansatz:} \quad \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - b}{b} = \frac{m_{Bier}}{m_{Dose}}$$



$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}-b}{b}=\frac{m_{Bier}}{m_{Dose}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}{b}-\underbrace{\frac{b}{b}}_{=1}=\frac{m_{Bier}}{m_{Dose}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}{b}=\frac{m_{Bier}}{m_{Dose}}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{m_{Bier}}{m_{Dose}}+1}=b$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{m_{Bier}}{m_{Dose}}+\underbrace{\frac{m_{Dose}}{m_{Dose}}}_{=1}}=b$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{m_{Bier}+m_{Dose}}{m_{Dose}}}=b$$

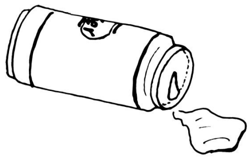
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{2}\cdot\frac{m_{Dose}}{m_{Bier}+m_{Dose}}=b$$

Die Masse des Bieres ist aber vom Durst (also der Füllhöhe x) abhängig! (und somit auch b)

Dies können wir so beschreiben: $m_{Bier}(x)=x\cdot m_{Bier}$

Wir setzen ein:

$$\boxed{\begin{aligned} m_{Bier}(voll)&=500g\\ m_{Dose}&=25g\end{aligned}}$$



$$\Leftrightarrow b(x)=\frac{1-x}{2}\cdot\frac{25}{x\cdot 500+25}$$

$$\Leftrightarrow b(x)=\frac{(1-x)\cdot 25}{x\cdot 1000+50}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b(x)=\frac{1-x}{40x+2}}$$

Die Höhe des Schwerpunkts liebt bei: $\boxed{S(x)=x_{(S_{Bier})}+b(x)}$

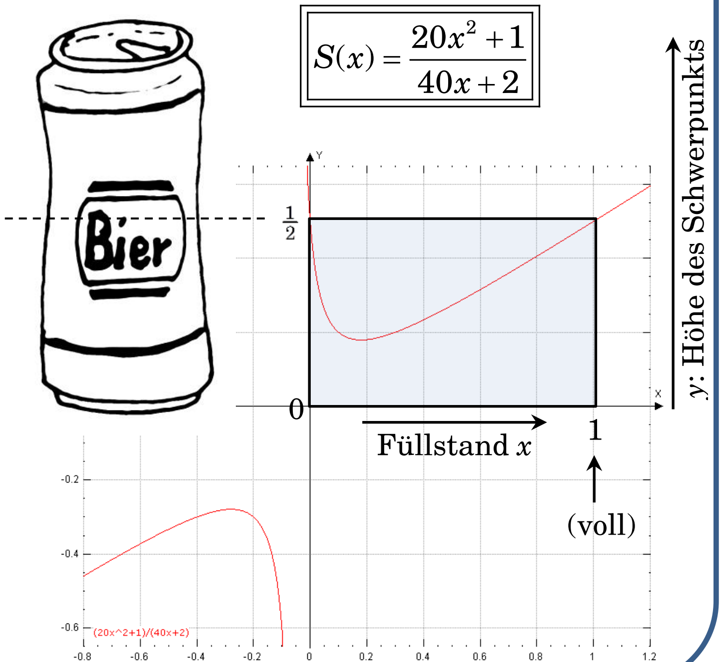
$$S(x)=\tfrac{x}{2}+b(x)$$

$$S(x)=\frac{x}{2}+\frac{1-x}{40x+2}$$

$$S(x)=\frac{x\cdot(20x+1)}{2\cdot(20x+1)}+\frac{1-x}{40x+2}$$

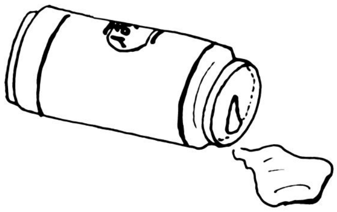
$$S(x)=\frac{20x^2+x+1-x}{40x+2}$$

$$\boxed{S(x)=\frac{20x^2+1}{40x+2}}$$



Die Dose steht am stabilsten, wenn der Schwerpunkt an tiefsten liegt. Also suchen wir das Minimum der Funktion *S(x)*!

Wir müssen die Funktion *S(x)* ableiten und suchen die Stelle, an der die Ableitung den Wert Null annimmt.



Die Anwendung von Ableitungsregeln führen zu:

Ableitung: $S'(x) = \dfrac{200x^2 + 20x - 10}{400x^2 + 40x + 1}$

Für die Nullstelle der Ableitungsfunktion *S'(x)* muss also gelten:

$$S'(x) \overset{!}{=} 0$$

$$0 = \frac{200x^2 + 20x - 10}{400x^2 + 40x + 1} \qquad \left| \cdot 400x^2 + 40x + 1 \right.$$

$$0 = 200x^2 + 20x - 10$$

Lösen der quadratischen Gleichung führt zu den Ergebnissen:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{20}$$

Nur die positive Lösung macht Sinn (es gibt keine negative Füllmenge!)

$$x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{20} \cong \underline{\underline{0{,}17913}}$$

<u>Also:</u> Wann steht die Bierdose am stabilsten? Wenn sie nur noch ca. 18% des Biers beinhaltet!

Dann liegt der Schwerpunkt S_{ges} am tiefsten!

Die Funktion *S(x)* hat dort ihr Minimum.

Oder anders ausgedrückt: Die Ableitung *S'(x)* hat eine Nullstelle.